

ELEMENTI DI ELETTROTECNICA

1. Segni convenzionali delle correnti e delle tensioni

Un circuito elettrico è un insieme di elementi variamente connessi tra loro. In essi circolano le correnti elettriche e fra due punti qualsiasi del circuito si determina una differenza di potenziale.

In *figura 1* è rappresentata una porzione di circuito. Le correnti hanno il verso convenzionalmente indicato con una freccia; tale verso potrà essere scelto arbitrariamente e la corrente sarà positiva se realmente circola nel verso della freccia (movimento di cariche elettriche positive secondo il verso della freccia), negativa se realmente circola nel verso contrario ad essa.

Il segno convenzionale di una tensione fra due punti o morsetti (differenza di potenziale fra due punti), viene scelto indicando con il segno + il punto a potenziale maggiore e col segno - quello a potenziale minore. La tensione fra i due punti in esame (ad es. punti 5 e 6 di *fig. 1*) sarà positiva se il punto cui è stato assegnato il segno + si trova effettivamente a potenziale maggiore di quello contrassegnato col segno -.

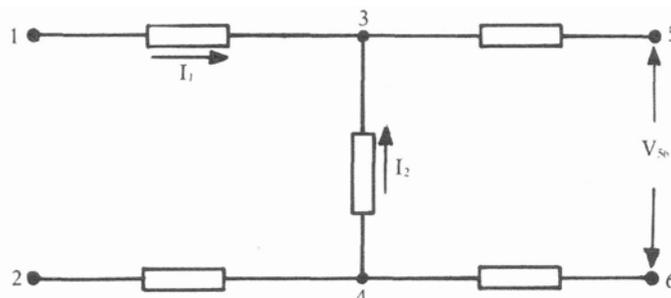


Fig. 1. - Porzione di circuito elettrico.

2. Legge di Ohm - Legge di Ohm generalizzata

Data una resistenza (*fig. 2*), percorsa da una corrente I nel verso indicato, ai suoi morsetti A e B si stabilisce una differenza di potenziale V_{AB} . Il morsetto in cui la corrente entra risulta a potenziale maggiore rispetto a quello da cui la corrente esce. Nel caso di *figura 2* il morsetto A sarà quindi contrassegnato col segno + e quello B col segno -.

La relazione che lega la tensione V_{AB} con la corrente I risulta:

$$V_{AB} = RI \quad (1)$$

La legge di Ohm generalizzata permette di determinare la differenza di potenziale fra due punti A e B, quando su un qualsiasi percorso che collega i due punti considerati, siano note le f.e.m. agenti e le cadute di tensione sugli elementi che connettono i punti in esame. Tale legge, nel caso di circuiti in continua, è espressa dalla relazione:

$$V_{AB} = \sum E - \sum RI \quad (2)$$

La (2) comprende come caso particolare la (1).

Nella (2) $\sum E$ indica la somma algebrica delle f.e.m. agenti nel percorso considerato, assumendo positive quelle aventi il morsetto + dalla parte di A. $\sum RI$ indica la somma di tutte le cadute di tensione sulle resistenze che si incontrano lungo il percorso da B ad A.

Esse hanno il segno positivo se il verso della corrente che percorre la resistenza R è diretto verso il morsetto A, negativo in caso contrario. Ad esempio nel caso di *figura 3*, la legge di Ohm generalizzata si scrive:

$$V_{AB} = E_2 - E_1 - (R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3) = E_2 - E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3$$

Un caso particolare è costituito da un generatore di f.e.m. E avente resistenza interna R_i (fig. 4). In tal caso per la legge di Ohm generalizzata è:

$$V_{AB} = E - R_i I \quad (3)$$

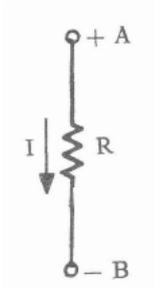


Fig. 2. - Resistenza percorsa da corrente.

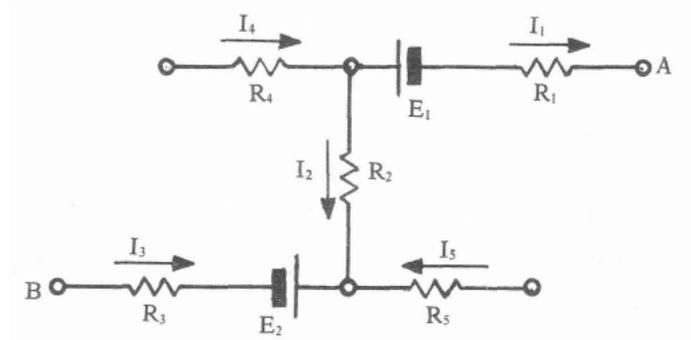


Fig. 3. - Porzione di circuito elettrico.

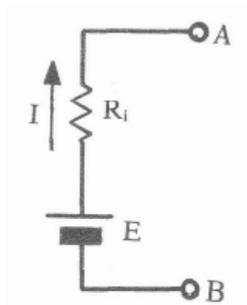


Fig. 4. - Generatore con resistenza interna.

4. Generatori di tensione e di corrente

Un generatore è un elemento a due morsetti in grado di fornire potenza ad un utilizzatore che venga collegato fra detti morsetti. La potenza viene fornita dal generatore, in quanto questi è in grado di far fluire nell'utilizzatore una corrente, la quale determina una tensione fra i morsetti in questione.

Si possono distinguere *generatori di tensione* e *generatori di corrente*. Per poter comprendere tale distinzione, definiremo i *generatori ideali di tensione* e i *generatori ideali di corrente*.

Un *generatore ideale di tensione* è un elemento che fornisce ai suoi morsetti una tensione costante e indipendente dalla corrente che esso eroga all'utilizzatore. Un generatore ideale di tensione viene di solito rappresentato come in figura 5, in cui \bar{E} è la f.e.m. del generatore in notazione complessa (nel caso di f.e.m. continue si avrà un valore E reale). La caratteristica V_{AB} , (modulo di \bar{V}_{AB}) in funzione di I (modulo di \bar{I}) nel caso di un generatore ideale di tensione risulta una retta parallela all'asse delle ascisse (fig. 6), posta ad una distanza E da questo e quindi di equazione:

$$V_{AB} = E \quad (4)$$

Un *generatore ideale di corrente* è invece un elemento in grado di fornire una corrente costante, indipendente dalla tensione \bar{V}_{AB} che compare ai suoi morsetti. Esso viene normalmente rappresentato come in figura 7, in cui \bar{I}_0 è la corrente, in notazione complessa, che viene erogata dal generatore. La caratteristica V_{AB} in funzione di I ,

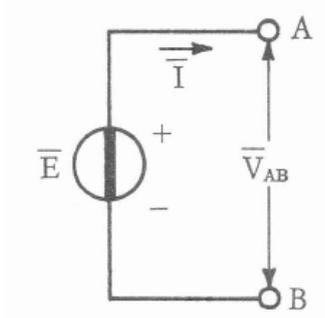


Fig. 5. - Generatore ideale di tensione.

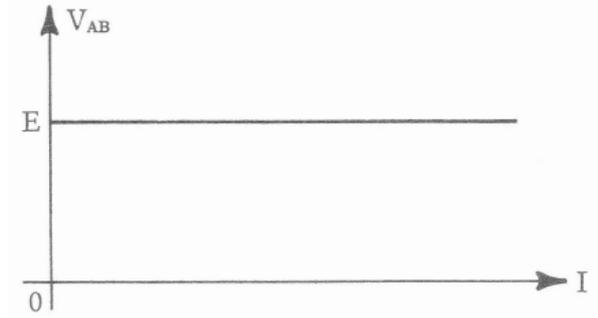


Fig. 6. - Caratteristica tensione-corrente di un generatore ideale di tensione.

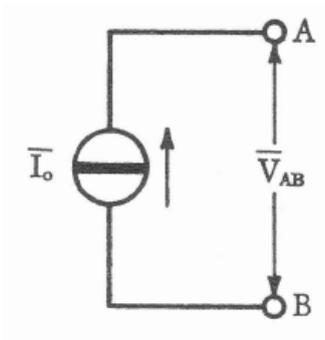


Fig. 7. - Generatore ideale di corrente.

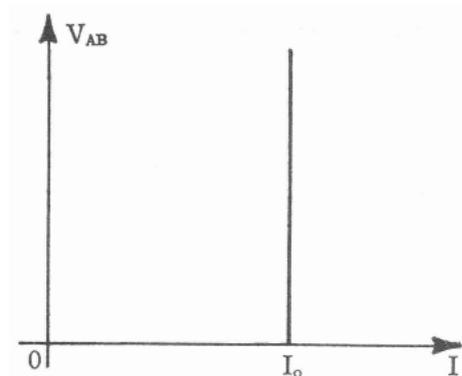


Fig. 8. - Caratteristica tensione-corrente di un generatore di corrente.

questa volta appare come in *figura 8*, cioè risulta una retta parallela all'asse delle ordinate ad una distanza I , da questo e quindi di equazione:

$$I = I_0 \quad (5)$$

In pratica non esistono generatori ideali di tensione, né generatori ideali di corrente, ma solo generatori in cui la tensione ai loro morsetti decresce, in modulo, all'aumentare della corrente erogata.

Per semplicità di trattazione considereremo ora generatori di f.e.m. o di correnti continue, tenendo presente che i risultati che si ottengono, sono validi anche per i generatori di f.e.m. o correnti alternative, pur di sostituire alle notazioni reali le corrispondenti notazioni complesse.

Ciò posto, in pratica, la caratteristica tensione-corrente per un qualsiasi generatore reale, si presenta come in *figura 9*, cioè con una tensione massima pari a E per $I = 0$. In queste ultime condizioni si dice che il generatore è a *vuoto*, il che equivale ad avere applicato ai suoi morsetti un utilizzatore di resistenza infinitamente grande. La tensione V_{AB} si annulla quando i morsetti del generatore vengono cortocircuitati (utilizzatore di impedenza nulla) e la corrente corrispondente viene chiamata *corrente di cortocircuito* I_{cc} .

L'equazione della caratteristica di *figura 9* risulta:

$$V_{AB} = E - \frac{E}{I_{cc}} I \quad (6)$$

Confrontando la (6) con la (3) si deduce che in serie alla f.e.m. E del generatore deve esserci una resistenza $R_i = E / I_{cc}$, che viene chiamata resistenza interna del generatore, la quale provoca una caduta di tensione $R_i I$.

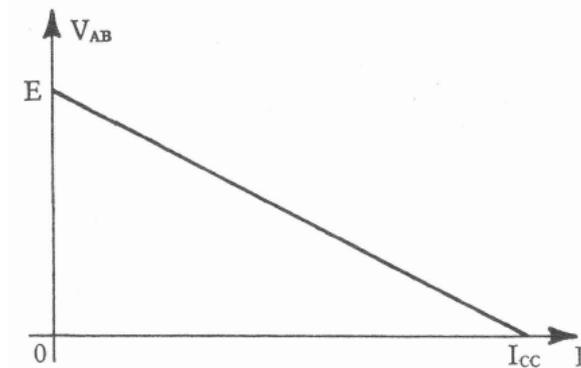


Fig. 9. - Caratteristica tensione-corrente di un generatore reale.

Il circuito equivalente del generatore reale di tensione si presenta perciò come in figura 10, in cui è:

$$R_i = E / I_{cc}$$

cioè la resistenza di un generatore reale di tensione è determinata dal rapporto fra la sua f.e.m. E e la corrente di cortocircuito I_{cc} .

Il generatore reale di tensione si avvicina ad un generatore ideale quando la resistenza interna R_i è molto piccola (si noti dall'equazione (6) che R_i rappresenta in valore assoluto il parametro angolare della retta di figura 9, per cui più R_i è piccolo, meno inclinata verso l'asse delle ascisse risulta la retta, costituente la caratteristica del generatore).

Se ora si risolve l'equazione (6) rispetto alla corrente I , si ottiene:

$$I = I_{cc} - \frac{I_{cc}}{E} V_{AB} \quad (7)$$

Osservando la caratteristica del generatore di figura 10, riportata per comodità in figura 11, si constata che per un generico valore V'_{AB} di V_{AB} la corrente I' fornita dal generatore all'utilizzatore, può essere considerata come risultante dalla differenza fra la corrente di cortocircuito I_{cc} (segmento AC di fig. 11) e la corrente corrispondente al segmento BC che vale:

$$\frac{I_{cc}}{E} V'_{AB}$$

(infatti $BC = BD \tan \alpha = V'_{AB} \tan \alpha$ e $\tan \alpha = I_{cc} / E$).

Quanto ora detto porta a considerare il generatore in esame, come un generatore di corrente, che genera la corrente di cortocircuito I_{cc} e che ne assorbe, nei suoi circuiti interni, una parte $\frac{I_{cc}}{E} V_{AB}$ dipendente dalla tensione ai suoi morsetti, erogando all'utilizzatore la differenza. Poiché, per quanto prima visto, il rapporto E / I_{cc} non è altro che la resistenza interna R_i del generatore e quindi:

$$\frac{I_{cc}}{E} V_{AB} = V_{AB} / R_i$$

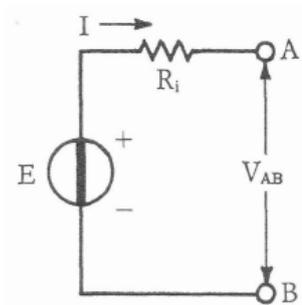


Fig. 10. - Generatore reale di tensione.

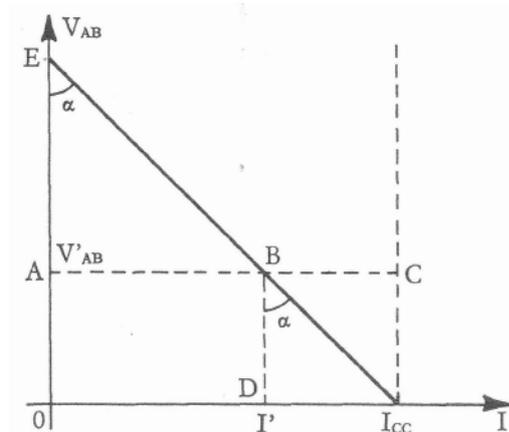


Fig. 11. - Caratteristica tensione-corrente di un generatore reale.

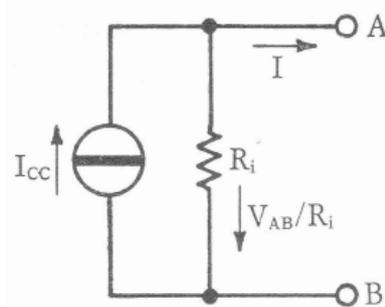


Fig. 12. - Schema di un generatore reale di corrente.

il generatore di corrente risulta avere in parallelo la resistenza interna R_i ciò conduce allo schema equivalente di *figura 12*.

Dai ragionamenti ora svolti si può concludere che un generatore reale può essere rappresentato indifferentemente come un generatore di tensione secondo lo schema di *figura 10* o come un generatore di corrente secondo lo schema di *figura 12* e che i due circuiti sono equivalenti, essendo stati dedotti ambedue da un generatore, avente la caratteristica tensione-corrente di *figura 9*.

Considerando infine che, se si indica con R_L la resistenza dell'utilizzatore applicata fra i morsetti A e B di *figura 10* o di *figura 12*, la tensione V_{AB} è data da IR_L , segue che *un generatore reale, può essere considerato avvicinarsi ad un generatore ideale di tensione nei casi in cui la tensione V_{AB} si approssima alla f.e.m. E, cioè quando R_i è molto piccola rispetto a R_L mentre si approssima ad un generatore ideale di corrente quando la corrente V_{AB}/R_L nell'utilizzatore si avvicina al valore I_{cc} , cioè quando R_i è molto grande rispetto a R_L .*

5. Teoremi di Thèvenin e Norton

I teoremi di Thèvenin e Norton sono di fondamentale importanza nello studio dei circuiti elettronici, nei limiti in cui questi possono essere considerati lineari, cioè tali da sussistere relazioni di proporzionalità fra tensione e corrente in ogni singolo elemento del circuito. Essi valgono per qualsiasi

frequenza dei generatori agenti nella rete e quindi anche nei circuiti in continua. solo che in tal caso al posto delle impedenze compaiono delle resistenze.

Il teorema di Thèvenin permette di sostituire una rete elettrica qualsiasi, considerata fra due morsetti con un generatore reale di tensione. Esso può essere così enunciato, facendo riferimento alla figura 13:

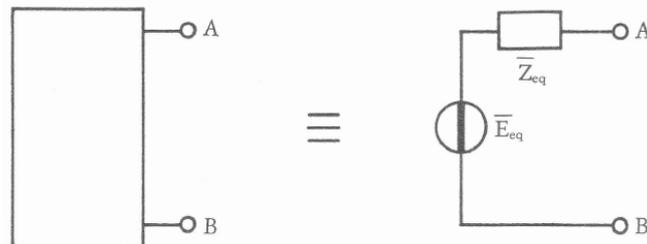


Fig. 13. – Teorema di Thèvenin

Una rete elettrica, considerata, fra due suoi morsetti A e B, è equivalente ad un generatore di tensione avente una f.e.m. \bar{E}_{eq} uguale alla tensione misurata fra A e B, con in serie un'impedenza \bar{Z}_{eq} di valore uguale a quella vista fra i morsetti in questione e ottenuta annullando tutte le f.e.m. dei generatori di tensione e le correnti dei generatori di corrente presenti nella rete.

L'annullamento delle f.e.m. viene ottenuto cortocircuitandole (solo le f.e.m. e non le corrispondenti impedenze interne); quello delle correnti dei generatori di corrente, aprendoli.

L'importanza del teorema di Thèvenin sta nel fatto che è possibile semplificare enormemente reti elettriche complesse. Infatti, applicando tale teorema si può sostituire ad una parte di una rete elettrica, un generatore di tensione equivalente, operando nel modo seguente: si individuano due morsetti A e B della porzione di rete da sostituire e che idealmente costituiscono i punti di connessione delle due parti in cui si può immaginare divisa la rete (fig. 14a); naturalmente tali parti devono essere connesse con due soli conduttori, cioè una volta separate esse devono costituire due bipoli.

Si distaccano quindi le due parti in questione e si applica il teorema di Thèvenin a quella da trasformare; si ottiene così un generatore di f.e.m. $\bar{E}_{eq} = \bar{V}_{AB}$ con in serie una impedenza \bar{Z}_{eq} . A questo punto si riconnette la porzione di rete che era stata staccata (fig. 14b) e si proseguono i calcoli.

Il teorema di Norton è analogo a quello di Thèvenin, solo che permette di sostituire una rete elettrica qualsiasi, considerata fra due suoi morsetti, con un generatore di corrente. Esso può essere così enunciato, facendo riferimento alla figura 15:

Una rete elettrica considerata fra due suoi morsetti A e B è equivalente ad un generatore di corrente, di valore \bar{I}_{eq} pari alla corrente che si ottiene ponendo in cortocircuito i due morsetti, con in parallelo una impedenza \bar{Z}_{eq} di valore pari a quella vista fra i morsetti considerati, annullando tutte le f.e.m. dei generatori di tensione e le correnti dei generatori di corrente presenti nella rete.

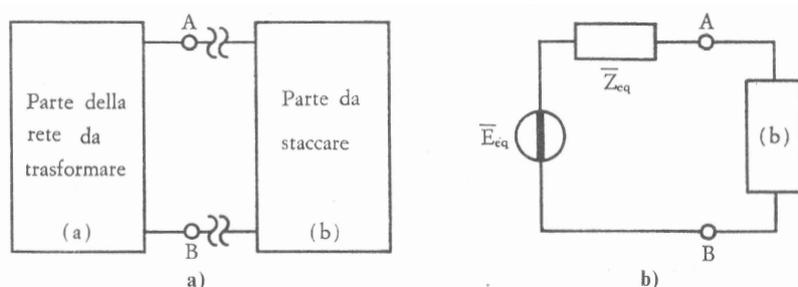


Fig. 14. - Applicazione del teorema di Thèvenin

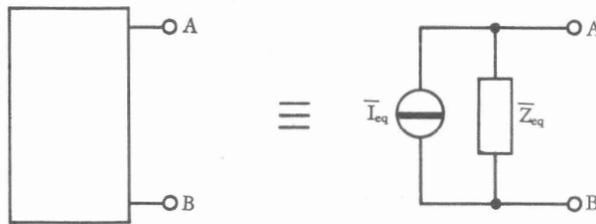


Fig. 15. - Applicazione del teorema di Norton.

In realtà il teorema di Norton si può considerare derivato dal teorema di Thevenin, tenendo presente quanto visto nel paragrafo precedente. Infatti il generatore di tensione di figura 13 può essere trasformato nel generatore di corrente di figura 15, in cui $\bar{I}_{eq} = \bar{E}_{eq} / \bar{Z}_{eq}$ si ottiene cortocircuitando il generatore di tensione.

I teoremi enunciati trovano larga applicazione nel caso si voglia calcolare la corrente che scorre in un ramo di una rete elettrica o la tensione ai suoi capi. In tal caso basta distaccare il ramo in questione e applicare il teorema di Thevenin o Norton alla restante parte della rete.

6. Teorema di Millman

Il teorema di Millman si applica ad un circuito costituito da n lati in parallelo. Indicando con A e B (fig. 21) i morsetti comuni, il teorema afferma che:

La tensione \bar{V}_{AB} risulta uguale al prodotto della corrente \bar{I}_{cc} che si ottiene mettendo in corto circuito i due morsetti A e B, moltiplicata per l'impedenza \bar{Z}_{AB} vista fra i morsetti considerati.

Poiché risulta (fig. 22):

$$\bar{I}_{cc} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{\bar{E}_n}{\bar{Z}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{E}_i}{\bar{Z}_i}$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{1}{1/\bar{Z}_1 + 1/\bar{Z}_2 + \dots + 1/\bar{Z}_n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/\bar{Z}_i}$$

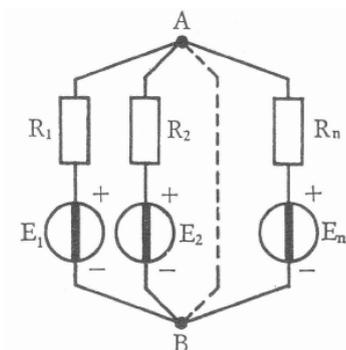


Fig. 21.

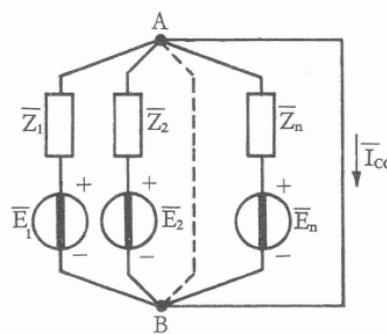


Fig. 22.

Applicazione del teorema di Millman.

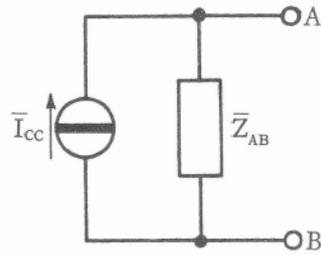


Fig. 23. - Circuito equivalente a quello di figura 21, in base al teorema di Norton.

il teorema di Millman si può esprimere nella forma:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{E}_i}{\bar{Z}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

Si può osservare che tale teorema deriva direttamente dal teorema di Norton.

Infatti il circuito di *figura 21* visto fra i morsetti A e B si può considerare equivalente a quello di *figura 23*, da cui si deduce:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{I}_{cc} \cdot \bar{Z}_{AB}$$

7. Principio di sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti si applica ai circuiti lineari, cioè a quei circuiti in cui sussistono relazioni di proporzionalità fra tensioni e correnti. In particolare, in tali circuiti, applicando f.e.m. di forma sinusoidale, circolano sempre correnti anch'esse di forma sinusoidale.

Il principio in questione stabilisce che: *l'effetto prodotto da più cause agenti simultaneamente è uguale alla somma degli effetti prodotti dalle singole cause, considerate agenti una per volta.*

In particolare, se in un circuito agisce una f.e.m. continua ed una alternata, le correnti nei vari rami del circuito e le tensioni fra una coppia qualsiasi di punti sono costituite da una componente continua e una alternata. In tale caso le componenti continue si calcolano come se nel circuito agisse la sola f.e.m. continua e quelle alternate come se agisse la sola f.e.m. alternata. Anche la potenza dissipata in una resistenza risulta data dalla somma delle potenze dissipate dalle componenti continua e alternata, considerate separatamente.